Brouwer の不動点定理から Sperner の補題を導く

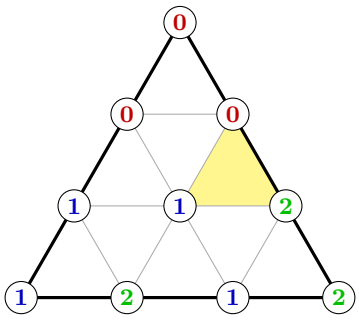
yotsunva

組合せ論 Advent Calendar 2026 (`https://adventar.org/calendars/12703`) の二日目の記事です。Brouwer の不動点定理から Sperner の補題を導き、Brouwer の不動点定理の直感を踏まえて Sperner の補題の self-contained な証明を与えます。Sperner の補題から Brouwer の不動点定理を導く話については、箱星さんの記事 (`https://combinatorics-fun.vercel.app/natori/202511/`) などを参照してください。大体それを逆に辿る議論になっています。Brouwer の不動点定理から Sperner の補題を導く話は既に [2] で行われていますが、その証明とは若干異なる方法で示します。

1 Brouwer の不動点定理と Sperner の補題

定理 1 (Brouwer の不動点定理)**.** n 次元閉球 $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ の自己連続写像 $f : B^n \to B^n$ は不動点を持つ。

定理 2 (Sperner の補題)**.** n 次元単体 $\Delta^n := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_0, \ldots, x_n \geq 0) \wedge \sum_i x_i = 1\}$ が有限個の小単体に分割されていて、小単体の頂点が $n+1$ 色 $0, \ldots, n$ で塗られているとする。$e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \Delta^n$（第 i 成分が 1）の色が i で e_i の向かいの面に含まれる頂点が i 以外の色で塗られているなら、$n+1$ 色で塗られた小単体が存在する。



定理 1 から定理 2 を導く。先にインフォーマルな証明を述べる。それぞれの小単体の頂点に色が塗られているが、グラデーションをつけてその塗り方を小単体全体（内部も含む）に拡張する。これで Δ^n 全体に色がつくので、点 $x \in \Delta^n$ を次のように動かす関数 $f : \Delta^n \to \Delta^n$ を定める：x についた色に含まれる赤さの分だけ x を Δ^n の赤い頂点から少し遠ざける（赤さが少ないときは赤い頂点に少し近づける。他の色についても同様）。Brouwer の不動点定理より f の不動点が存在する。不動点では $n+1$ 色が均一に混ざっているので、その点を含む小単体は $n+1$ 色で塗られている。ちゃんと書くと次のようになる：

証明. 各小単体 $P_k \subseteq \Delta^n$ について、色が i の頂点を e_i に写すようなアファイン写像 $\varphi_k : P_k \to \Delta^n$ が一意に定まる（これはグラデーションのついた塗り方だと思える）。これらを貼り合わせて区分アファイン写像 $\varphi : \Delta^n \to \Delta^n$ が得られる。連続写像 $f : \Delta^n \to \Delta^n$ を

$$f(x) := x + \varepsilon \left(\frac{1}{n+1}(1, \cdots, 1) - \varphi(x) \right)$$

と定める（$\varepsilon > 0$ は十分小さく取り、f の像が Δ^n に収まるようにする）。Brouwer の不動点定理より、f は不動点 a をもつ。$\varphi(a) = \frac{1}{n+1}(1, \cdots, 1)$ なので、a を含む小単体は $n+1$ 色で塗られている。 □

Brouwer の不動点定理の感覚的な説明を思い出すと、以下のような Sperner の補題の感覚的な説明が得られる：

- 上の証明と同様に Δ^n 全体に色をつけて、それぞれの点に色に応じたベクトルを対応させることで連続写像 $v : \Delta^n \to \mathbb{R}^n$ が得られる（上の証明で言うと $v(x) := \frac{1}{n+1}(1, \cdots, 1) - \varphi(x) \in \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_i x_i = 0\} \cong \mathbb{R}^n$）。$v$ による $\partial\Delta^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : (\exists k.\, x_k = 0) \wedge \sum_i x_i = 1\}$ の像は原点 $0 \in \mathbb{R}^n$ を囲む形になっており、$\partial\Delta^n_t := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : (\exists k.\, x_k = t) \wedge \sum_i x_i = 1\}$ の t を 0 から $1/(n+1)$ まで動かすと像 $v(\partial\Delta^n_t)$ は一点に縮んでいくので、$0 \in v(\partial\Delta^n_t)$ をみたす $t \in [0, 1/(n+1)]$ が存在する。v で 0 に写る点を含む小三角形は $n+1$ 色で塗られていることが分かる。

2　連続から離散への翻訳

前節の最後の感覚的な説明を離散的な証明に翻訳する。簡単のため 2 次元の場合を考える。このとき、$\partial\Delta^2$ の像が原点を囲むことは「v の原点周りの回転数が 1 である」と言い表すことができる。回転数は離散的に表現できる：

定義 3. 円周上に反時計回りに並んだ n 点 $0, 1, ..., n-1$ が $\varphi : \{0, 1, ..., n-1\} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ によって三色で塗られているとする。辺 $[0,1], \ldots, [n-2, n-1], [n-1, 0]$ を φ で写した形式的な和

$$S := [\varphi(0), \varphi(1)] + \cdots + [\varphi(n-2), \varphi(n-1)] + [\varphi(n-1), \varphi(0)] \in \mathbb{Z}[0,1] \oplus \mathbb{Z}[1,2] \oplus \mathbb{Z}[2,0] \cong \mathbb{Z}^3$$

を考える（ただし $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ について $[i+1, i] = -[i, i+1]$, $[i, i] = 0$ とみなす）。このとき $S = k([0,1]+[1,2]+[2,0])$ となる $k \in \mathbb{Z}$ が存在するので、この k を彩色 φ の回転数とよぶ。

注 4. φ の回転数は、反時計回りに $0, 1, 2$ を並べて、その上を $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n-1), \varphi(0)$ と辿ったときに回る回数と等しい。例えば、前ページの絵の三角形の外周の彩色を $\varphi : \{0, 1, ..., 8\} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ と表すと、φ の値は順に $0, 0, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 0$ で、φ の回転数は 1 である。

感覚的な説明で t を動かして像を一点に縮めていた部分は、次のような離散的な議論に置き換えられる：2 色以下で塗られているような外側の小三角形を取り除いても、外周の彩色の回転数は変わらない。整理すると、2 次元の Sperner の補題の一般化が得られる：

定理 5. 平面上の多角形 P が小多角形 $P_0, \ldots, P_{N-1}$ に分割されていて、小多角形の頂点が三色で塗られているとする。このとき、P の外周の彩色の回転数は、$P_0, \ldots, P_{N-1}$ の彩色の回転数の和と等しい。

証明. 小多角形の回転数の和を計算するとき、P の外周に含まれない辺は二回カウントされて寄与が打ち消されるので、外周の分だけが残る。 □

もとの 2 次元の Sperner の補題では、（良い感じの向きで考えれば）Δ^2 の外周の彩色の回転数が 1 になっている。2 色以下で塗られた小三角形については回転数が 0 なので、3 色で塗られた小三角形があることが分かる。反時計回りに塗られたものが時計回りに塗られたものより一つ多いことも分かる。

3 次元以上でも同様の議論ができる（例えば [1] に載っている）。このような話は複体の理論として整備されており、代数的位相幾何学の基本になっている。

参考文献

[1] Brown, A. B., Cairns, S. S. (1961). Strengthening of Sperner's Lemma Applied to Homology Theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 47(1), 113–114. https://doi.org/10.1073/pnas.47.1.113

[2] Park S., Jeong, K. S. (2003). A proof of the Sperner lemma from the Brouwer fixed point theorem, *Nonlinear Anal.* Forum 8, 65–67.