約数関数の等式の組合せ論的証明

yotsunva

組合せ論 Advent Calendar 2026 (`https://adventar.org/calendars/12703`) の四日目の記事です。n の正の約数の k 乗和を $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$ と表し、σ_k を約数関数と呼びます（$d \mid n$ と書いたら d は n の正の約数だということにします)。約数関数の等式

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_3(k)\sigma_3(n-k)$$

はモジュラー形式の等式 $E_8 = E_4^2$ を使って証明できますが、この記事では [1] にある組合せ論的証明を紹介します。総和記号がたくさん出てきますが、やっていることは簡単です。

1 組合せ論的証明

$n \geq 1$ とする。有限集合 $\mathcal{S}$ を

$$\mathcal{S} := \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4 : a,b,c,d \geq 1,\ ad+bc = n\right\}$$

と定める。$\{(a,b,c,d) \in \mathcal{S} : a > b\}$ を単に $\{a > b\}$ のように表す。このとき、次のような全単射がある：

- $\alpha : \mathcal{S} \to \mathcal{S},\ (a,b,c,d) \mapsto (b,a,d,c)$（これは二つの全単射 $\{a > b\} \to \{a < b\},\ \{c > d\} \to \{c < d\}$ を誘導する）
- $\beta : \{a > b\} \to \{c > d\},\ (a,b,c,d) \mapsto (a-b, b, c+d, d)$

以下、$\sum f(a,b)$ と書いたら $\mathcal{S}$ 上の和を表し、$\sum_{a>b} f(a,b)$ と書いたら $\{a > b\}$ 上の和を表す。

補題 1. $f \in \mathbb{Z}[X,Y]$ に対して多項式 Df を $(Df)(X,Y) := f(X,Y) - f(X-Y,Y)$ と定める。f が次の条件をみたすとする：

1. $f(X,Y) = f(Y,X)$（つまり f は対称式）
2. $(Df)(X,Y) = (Df)(Y,X)$（条件 1 のもとで $f(-X, X+Y) = f(X,Y)$ と同値）
3. $f(0,Y) = 0$

このとき、

$$\sum (Df)(a,b) = \sum_{c=d} f(a,b).$$

証明. $\sum f(a,b)$ を二通りの分割 $\mathcal{S} = \{a > b\} \sqcup \{a < b\} \sqcup \{a = b\} = \{c > d\} \sqcup \{c < d\} \sqcup \{c = d\}$ に従って計算すると、次のようになる：

$$\sum f(a,b) = \sum_{a>b} f(a,b) + \sum_{a<b} f(a,b) + \sum_{a=b} f(a,b) \overset{\alpha}{=} 2\sum_{a>b} f(a,b) + \sum_{a=b} f(a,b),$$
$$\sum f(a,b) \overset{\alpha}{=} 2\sum_{c>d} f(a,b) + \sum_{c=d} f(a,b) \overset{\beta}{=} 2\sum_{a>b} f(a-b,b) + \sum_{c=d} f(a,b).$$

整理すると、

$$2\sum_{a>b} (Df)(a,b) = \sum_{c=d} f(a,b) - \sum_{a=b} f(a,b) = \sum_{c=d} f(a,b) - \sum_{a=b} (Df)(a,b).$$

よって

$$\sum (Df)(a,b) \overset{\alpha}{=} 2\sum_{a>b} (Df)(a,b) + \sum_{a=b} (Df)(a,b) = \sum_{c=d} f(a,b).$$

となる。 □

$A := (XY(X+Y))^2$, $B := X^2+XY+Y^2$ とおくと、$A\mathbb{Z}[A,B]$ に属する多項式は補題 1 の三条件をみたす。

定理 2.

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_3(k)\sigma_3(n-k)$$

証明. 補題 1 において $f := A$ とすると、$DA = (XY(X+Y))^2 - ((X-Y)YX)^2 = 4X^3Y^3$ より

$$4\sum a^3b^3 = \sum_{c=d}(ab(a+b))^2$$

となる。左辺については、$k := ad$ とおいて和を k ごとに計算すると、

$$\sum a^3b^3 = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\substack{a,b,c,d\geq 1\\ ad=k,\ bc=n-k}} a^3b^3 = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{a|k}a^3\right)\left(\sum_{b|(n-k)}b^3\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\sigma_3(k)\sigma_3(n-k)$$

となる。右辺については、$k := a+b$ とおくと

$$\sum_{c=d}(ab(a+b))^2 = \sum_{k|n}\sum_{\substack{a,b\geq 1\\ a+b=k}}(ab(a+b))^2 = \sum_{k|n}\sum_{a=1}^{k-1}(a(k-a)k)^2 \overset{\text{頑張る}}{=} \sum_{k|n}\frac{k^7-k^3}{30} = \frac{\sigma_7(n)-\sigma_3(n)}{30}.$$

これらから従う。 □

f を変えると色々な等式が得られる（次の等式はモジュラー形式の等式 $E_{10} = E_4E_6$ からも従う）：

定理 3.

$$11\sigma_9(n) = 21\sigma_5(n) - 10\sigma_3(n) + 5040\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_3(k)\sigma_5(n-k)$$

証明. 補題 1 において $f := AB$ とすると、$D(AB) = (XY(X+Y))^2(X^2+XY+Y^2) - ((X-Y)YX)^2(X^2-XY+Y^2) = 6(X^3Y^5+X^5Y^3)$ より

$$6\sum(a^3b^5+a^5b^3) = \sum_{c=d}(ab(a+b))^2(a^2+ab+b^2)$$

となる。ここで

$$\sum a^3b^5 \overset{\alpha}{=} \sum a^5b^3$$

なので、左辺は

$$\sum a^3b^5 = \sum_{k=1}^{n-1}\sigma_3(k)\sigma_5(n-k)$$

の 12 倍になる。右辺については、

$$\sum_{c=d}(ab(a+b))^2(a^2+ab+b^2) = \sum_{k|n}\sum_{a=1}^{k-1}(a(k-a)k)^2(a^2+a(k-a)+(k-a)^2) \overset{\text{頑張る}}{=} \frac{11\sigma_9(n)-21\sigma_5(n)+10\sigma_3(n)}{420}.$$

これらから従う。 □

おまけ：モジュラー形式を使う証明

$k \geq 2$ に対して重さ $2k$ の Eisenstein 級数を

$$G_{2k}(\tau) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}\frac{1}{(m\tau+n)^{2k}} \quad (\Im\tau > 0)$$

と定める。モチベーションなどを知りたい方には Borcherds の動画をおすすめする (https://youtube.com/playlist?list=PL8yHsr3EFj51HisRtNyzHX-Xyg6I3Wl2F)。この関数は $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ について

$$G_{2k}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{2k} G_{2k}(\tau)$$

という対称性をもっており、$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ $2k$ のモジュラー形式になっている。$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ 8 のモジュラー形式がなすベクトル空間 M_8 は 1 次元であることが知られており、$G_8, G_4^2 \in M_8$ なので G_8 は G_4^2 の定数倍になる。

$q := e^{2\pi i\tau}$ とおいて

$$E_{2k}(\tau) := \frac{G_{2k}(\tau)}{2\zeta(2k)}$$

を Fourier 展開すると、

$$E_{2k}(\tau) = 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n$$

となる（B_k は Bernoulli 数）。例えば

$$E_4(\tau) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n, \qquad E_8(\tau) = 1 + 480 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_7(n) q^n.$$

となる。G_8 は G_4^2 の定数倍であることから $E_8 = E_4^2$ となり、両辺の Fourier 係数を比較すると

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_3(n-m)$$

が言える。

参考文献

[1] Huard, J. G., Ou, Z. M., Spearman, B. K., Williams, K. S. (2002). Elementary evaluation of certain convolution sums involving divisor functions. In *Number Theory for the Millennium II* (pp. 229-274). AK Peters/CRC Press.