群の圏のモノ射は正則モノ

yotsunva

圏論 Advent Calendar 2026 (`https://adventar.org/calendars/12973`) の一日目の記事です。部分群 $H \leq G$ について、ちょうど H 上で等しくなるような二つの群準同型 $i_0, i_1 : G \to A$ を作ります。

1 群の圏のモノ射

$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ の合成を $f\,;g$ と表す。

命題 1. Grp のモノ射 $f : H \to G$ は単射である。

証明. $K := \{(x, y) \in H \times H : f(x) = f(y)\}$ は群である。射影 $\pi_0, \pi_1 : K \to H$ について $\pi_0\,;f = \pi_1\,;f$ なので、$\pi_0 = \pi_1$ である。$x, y \in H$ が $f(x) = f(y)$ をみたすとすると、$(x, y) \in K$ なので $x = \pi_0(x, y) = \pi_1(x, y) = y$ である。

注 2. (K, π_0, π_1) は f の kernel pair と呼ばれる。これは $H \xrightarrow{f} G \xleftarrow{f} H$ の pullback であり、f と合成すると等しくなるような二つの射 $K \rightrightarrows H$ の選び方として普遍的である。K として一元生成自由群 $\mathbb{Z}$ を使う証明もあるが、とりあえず上の証明を書いておけば有限主義者も許してくれるだろう（以降は有限主義者に配慮しない）。

定義 3. 射 $f : X \to Y$ がある二つの射 $g, h : Y \to Z$ のイコライザになるとき、f は正則モノであるという。（群の圏においては、g, h のイコライザは包含写像 $\{y \in Y : g(y) = h(y)\} \to Y$ である。）

目標は次の定理を示すことである：

定理 4. Grp のモノ射 $f : H \to G$ は正則モノである。

f は単射なので H を G の部分群とみなす。H が G の正規部分群であれば射影 $\pi : G \to G/H$ と零射 $0 : G \to G/H$ のイコライザが f になるが、一般にはどうするかというのが問題である。排中律を使う証明 [1, Exercise 7H] や、関数集合を使う証明 (`https://ncatlab.org/nlab/show/Grp#eq`) もあるが、普通に考えれば f の cokernel pair（$G \xleftarrow{f} H \xrightarrow{f} G$ の pushout）を考えるのが自然だろう。f と合成すると等しくなるような二つの射 $G \rightrightarrows A$ の選び方として普遍的なのが cokernel pair である。実際、以下が成り立つ（申し訳程度の圏論要素）：

命題 5 ([2, Proposition 2.5.7] の双対)**.** $g, h : Y \to Z$ のイコライザ $f : X \to Y$ が cokernel pair (A, i_0, i_1) をもつとき、f は i_0, i_1 のイコライザである。（このように自身の cokernel pair のイコライザになる射は effective monomorphism と呼ばれる。）

証明. まず $f\,;i_0 = f\,;i_1$ である。次に cokernel pair の普遍性より $i_0\,;j = g$ と $i_1\,;j = h$ をみたす射 $j : A \to Z$ が存在する。射 $e : W \to Y$ が $e\,;i_0 = e\,;i_1$ をみたすとすると、右から j を掛けることで $e\,;g = e\,;h$ となるので、$e = k\,;f$ となる $k : W \to X$ が存在する。一意性も言える（例えばイコライザがモノであることから言うこともできる）。よって f は i_0, i_1 のイコライザである。 □

$H \to G$ の cokernel pair は融合和（融合積と言う方が普通かもしれないが、余極限なので和と呼ぶことにする）の一種なので、次の節で融合和について考えて定理 4 を示すことにする。

注 6. モノイドの圏において、包含写像 $(\mathbb{N}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ はモノ射だが正則モノではない。モノイド準同型

$f, g : \mathbb{Z} \to M$ が $\mathbb{N}$ 上で等しいとき、$n \in \mathbb{N}$ について

$$f(-n) = f(-n) + g(n) + g(-n) = f(-n) + f(n) + g(-n) = g(-n)$$

なので f, g は $\mathbb{Z}$ 上で等しくなり、f, g のイコライザは $\mathbb{Z}$ の恒等射となる。

2 融合和の正しい扱い方

定理 4 を示すためには、$i_0, i_1 : G \to G *_H G$ のイコライザが H であることを示せばよい。i_0, i_1 は H 上で等しいので、$i_0(x) = i_1(x)$ のとき $x \in H$ となることを示せばよい。よくある証明は融合和の元の正規形を定めて任意の元が正規形として一意的に表せることを使うが、正規形を定めるときに選択公理が使われたりする。正規形より緩い既約語の概念を使えば選択公理は回避できるが、任意の元が既約語の形で表せることを示すときに排中律が使われたりする。この問題を回避するために、以下では合流性をみたす書き換え系を使って融合和を作る。

Λ を集合とする。任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して H が G_λ の部分群であるとき、融合和 $*_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ は次のように作れる：

定義 7. $\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda}\{i_\lambda(x) : x \in G_\lambda\} (\cong \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda)$ を文字の集合とするような文字列がなすモノイド（つまり自由モノイド）を M と表す（積は文字列の結合で、空文字列を ε と表す）。M の上の二項関係 $\Rightarrow$ を次のように生成する（$\lambda, \lambda_0, \lambda_1 \in \Lambda,\ h \in H$ とする。$\cdots$ の部分は $\Rightarrow$ の左右で変わらないとする）：

(R1) $\cdots i_\lambda(1) \cdots \Rightarrow \cdots \varepsilon \cdots$
(R2) $\cdots i_\lambda(x) i_\lambda(y) \cdots \Rightarrow \cdots i_\lambda(xy) \cdots$
(R3) $\cdots i_{\lambda_0}(xh) i_{\lambda_1}(y) \cdots \Rightarrow \cdots i_{\lambda_0}(x) i_{\lambda_1}(hy) \cdots$
(R3') $\cdots i_{\lambda_0}(x) i_{\lambda_1}(hy) \cdots \Rightarrow \cdots i_{\lambda_0}(xh) i_{\lambda_1}(y) \cdots$（群の場合は (R3) から出るのであってもなくても同じだが、後でモノイドの話をするときに使う）
(R4a) $\cdots i_{\lambda_0}(h) i_{\lambda_1}(y) \cdots \Rightarrow \cdots i_{\lambda_1}(hy) \cdots$
(R4b) $\cdots i_{\lambda_0}(x) i_{\lambda_1}(h) \cdots \Rightarrow \cdots i_{\lambda_0}(xh) \cdots$
(R5) $\cdots i_{\lambda_0}(h) \cdots \Rightarrow \cdots i_{\lambda_1}(h) \cdots$

$X = Y$ または $X \Rightarrow Y$ であるとき $X \Rightarrow^{\leq 1} Y$ と表す。$\Rightarrow$ が生成する M 上の前順序（つまり反射推移閉包）を $\Rightarrow^*$ と表し、$\Rightarrow$ が生成する M 上の同値関係を $\sim$ と表す。$\sim$ はモノイドの合同関係であり、$M/\sim \cong *_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ となる。

注 8. $\Rightarrow$ を書き換え系とみなすと、(R3), (R5) のせいで停止的にはならない。停止的になるように作ろうとすると剰余類の代表元を選択したりする羽目になるのであえてそうしている。邪念を捨てて、否定を使わずに自然に作ることが重要である。

$\Rightarrow$ のダイヤモンド性を示す（停止性がないので局所合流性を示すだけでは不十分である）。

定理 9. $Y \Leftarrow X \Rightarrow Z$ をみたす $X, Y, Z \in M$ に対し、$Y \Rightarrow^{\leq 1} W \Leftarrow^{\leq 1} Z$ をみたす $W \in M$ が存在する。

証明. $\Rightarrow$ を書き換え系とみなしたとき、$X \Rightarrow Y$ と $X \Rightarrow Z$ で書き換えられる部分が disjoint なら、互いに真似をして書き換えれば $Y \Rightarrow W \Leftarrow Z$ と合流する。それ以外のケースでは $Y \Leftarrow X \Rightarrow Z$ の形に応じて考えればよい。全部やると面倒なので重要なケースだけ扱う。

- $h_0 = xh_1$ $(h_0, h_1 \in H)$ と表せる場合、(R3), (R4a) によって $\cdots i_{\lambda_0}(h_0) i_{\lambda_1}(y) \cdots$ は $\cdots i_{\lambda_0}(x) i_{\lambda_1}(h_1 y) \cdots$ とも $\cdots i_{\lambda_1}(h_0 y) \cdots$ とも書き換えられる。$x = h_0 h_1^{-1} \in H$ なので (R4a) によって前者も $\cdots i_{\lambda_1}(h_0 y) \cdots$ に書き換えられる。
- $1 = xh$ $(h \in H)$ となる場合、(R1), (R3) によって $\cdots i_{\lambda_0}(1) i_{\lambda_1}(y) \cdots$ は $\cdots i_{\lambda_1}(y) \cdots$ とも $\cdots i_{\lambda_0}(x) i_{\lambda_1}(hy) \cdots$ とも書き換えられる。$x = h^{-1} \in H$ なので (R4a) によって後者も $\cdots i_{\lambda_1}(y) \cdots$ に書き換えられる。 □

注 10. この証明はモノイドの融合和についてはうまくいかない。上の証明で扱った 2 つのケースについて、(R3)

で書き換えた方を (R3') で戻すことで $Y \Rightarrow W \Leftarrow^* Z$ または $Y \Rightarrow^* W \Leftarrow Z$ の形で合流することは可能だが、$Y \Rightarrow^{\leq 1} W \Leftarrow^{\leq 1} Z$ の形では合流できない。また、remark 6 の現象は「H がモノイドで $xh = 1$ かつ $hy = 1$ のとき、$i_0(x)i_1(h)i_1(y)$ が複数回の書き換えで $i_0(x)$ にも $i_1(y)$ にもなるのにこれらは一般には合流しない」という話と関係している。上の証明の 2 つ目のケースが発生し、$Y \Rightarrow W \Leftarrow^* Z$ または $Y \Rightarrow^* W \Leftarrow Z$ の形で局所的には合流可能だが全体で見ると合流しない。

系 11. $X \sim Y$ のとき、$X \Rightarrow^* Z \Leftarrow^* Y$ をみたす $Z \in M$ が存在する。

証明. X, Y が $\Rightarrow^*$ のジグザグで結ばれているので定理 9 を繰り返し使えばよい。 □

系 12. $i_0(x) =_{G *_H G} i_1(x)$ のとき $x \in H$ である。

証明. $i_0(x) \sim i_1(x)$ なので系 11 より $i_0(x) \Rightarrow^* Z \Leftarrow^* i_1(x)$ をみたす $Z \in M$ が存在する。$i_0(x)$ からの書き換え回数と $i_1(x)$ からの書き換え回数が両方 0 回だと仮定すると、$i_0(x)$ と $i_1(x)$ は M 上等しいことになるがこれは $0 \neq 1$ に反する。よって少なくとも一方は $\Rightarrow$ によって一回以上書き換えられており、その書き換えは (R1), (R5) のどちらかなので $x \in H$ が言える。 □

注 13. ちなみに $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q})$ の pushout は自明群であり、この節の書き換え系の議論は $H \to G_\lambda$ が単射であることを本質的に使っている [3, Exercise I-1.1-2]。

参考文献

[1] Adámek, J., Herrlich, H., Strecker, G. (1990). *Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats.* John Wiley and Sons.

[2] Borceux, F. (1994). *Handbook of Categorical Algebra Vol. 1: Basic Category Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 50, Cambridge University Press.

[3] Serre, J.-P. (1980). *Trees.* Springer-Verlag Berlin.