

On inductive definitions of Noetherian rings

黒木 亮汰

東京大学

数学基礎論若手の会

2026 年 10 月 17 日

スライド：



RS-Noetherian rings (Richman, Seidenberg)

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \implies \exists n. I_n = I_{n+1}$$

問題点：無限列の使用、従属選択公理、排中律

「正しい」定義は？

先行研究

Noether 環の色々な定義が考えられている。ここでは 9 種類の Noether 性について考える (bar predicate が 3 種類、集合が 3 種類)。

	非単調 inductive	単調 inductive	無限列
有限生成イデアル	*	BSB ¹	RS
元のリスト	*	*	*
元	*	CP ²	*

¹Buriola, G., Schuster, P., Blechschmidt, I. (2023). A Constructive Picture of Noetherian Conditions and Well Quasi-orders. In: Unity of Logic and Computation. CiE 2023. Lecture Notes in Computer Science, vol 13967. Springer.

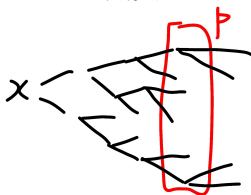
²Coquand, T., Persson, H. (1999). Gröbner Bases in Type Theory. In: Types for Proofs and Programs. TYPES 1998. Lecture Notes in Computer Science, vol 1657. Springer.

Sequential bar predicate

$(X, \prec)$: 集合と二項関係

$$P \mid_{\text{seq}} x \equiv (x = a_0 \prec a_1 \prec a_2 \prec \cdots \implies \exists k \in \mathbb{N}. P(a_k))$$

(x から始まるどんな無限パスも P に妨害される)

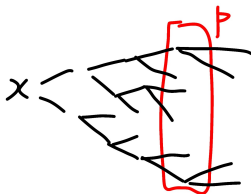


$X := \{\text{有限生成イデアルのリスト}\},$
 $\text{Stall}[I_0, \dots, I_{n+1}] \iff I_n = I_{n+1}$ とすると、

$$\text{RS-Noetherian} \iff \text{Stall} \mid_{\text{seq}} []$$

Inductive bar predicate

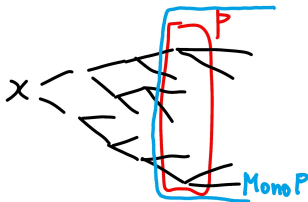
$$\frac{P(x)}{P \mid x} \text{ now} \qquad \frac{\forall y \succ x. P \mid y}{P \mid x} \text{ later}$$



$P \mid x$ なら $P \mid_{\text{seq}} x$ だが、逆は bar induction (非構成的)。
 $\text{Stall} \mid_{\text{seq}} []$ と $\text{Stall} \mid []$ は古典的には同値。

Monotone inductive bar predicate

$$\frac{P(x)}{(\text{Mono } P)(x)} \quad \frac{(x \prec y) \wedge (\text{Mono } P)(x)}{(\text{Mono } P)(y)}$$



P を単調なものに制限した bar induction は monotone bar induction と呼ばれる。

$\text{Stall} \mid_{\text{seq}} [], \text{Stall} \mid [], (\text{Mono Stall}) \mid []$ は古典的には同値。

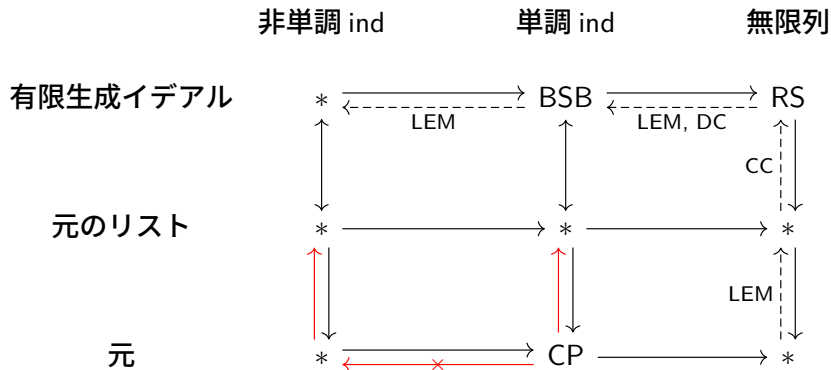
集合 X の候補

$X := \{\text{有限生成イデアルのリスト}\}$ の代わりに、
 $X := \{\text{元のリストのリスト}\}, \{\text{元のリスト}\}$ とすることもできる。
古典的に以下の二つは Noether 性と同値：

$$\sigma_0, \sigma_1, \dots \in \text{List } R \implies \exists n. \sigma_n \subseteq \langle \sigma_0, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$$

$$x_0, x_1, \dots \in R \implies \exists n. x_n \in \langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle$$

主結果



(破線矢印は古典的な含意)

非単調と単調の分離

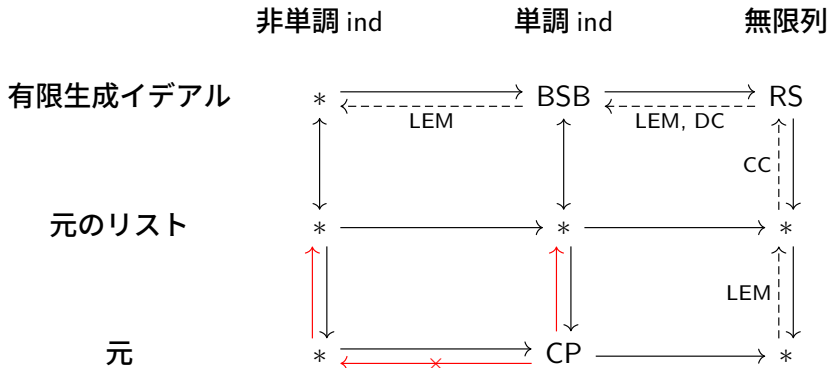
算術的な話に帰着して、トポス $\mathbf{Sh}(2^{\mathbb{N}})$ の内部論理で分離した。

$f : \mathbb{N} \rightarrow 2$, $\theta(n) \equiv (f(n) = 0) \vee (\exists m > n. f(m) = 1)$.

$(X, \prec) := (\mathbb{N}, <)$ とすると $(\text{Mono } \theta) \mid 0$ だが、 $\theta \mid 0$ は一般には言えない。

- ▶ $f(0) = 0$ なら $\theta(0)$ なので $\theta \mid 0$
- ▶ $f(0) = 1$ なら $\forall n > 0. \theta \mid n$ を言いたいだが、例えば $f(1) = 1$ だったらまだ $\theta \mid 1$ とは言えない ($f(1) = 1$ の場合、 $\theta(0)$ なので $(\text{Mono } \theta) \mid 1$ は言える。単調化すると「後戻り」が許される。)

まとめ



- ▶ 無限列は良くない
- ▶ 「正しい」 bar predicate を選べば、X はどれを使っても同じ
- ▶ 単調化すると弱くなる（単調化したものが Noether 性の「正しい」定義だと思う）